Муниципальное автономное общеобразовательное учреждение
г. Хабаровска
«Математический лицей»

ПРИНЯТО на заседании Педагогического совета Протокол № От «23» 08 2018 г.	УТВЕРЖДЕНО Приказ № 01-16/53 от «01» 09 2018 г. _______________ Директор: Г. Я. Готсдинер

Рабочая программа
по внеурочной деятельности
«Способы решения нестандартных неравенств»
9 – В класс

Составитель:
Зотова Ирина Александровна
учитель математики
высшей категории

2018 -2019 учебный год

ПРОГРАММА КУРСА

1.Пояснительная записка

Предлагаемый элективный курс по математике для предпрофильной подготовки учащихся 9 класса основной школы (II полугодие, 18 часов) посвящен алгебраическим неравенствам. В курсе основной школы неравенства с переменной изучаются, начиная с 8 класса, но в достаточно систематизированном и обобщенном виде этот материал в учебниках по математики основной школы не представлен.

Элективный курс "Учимся самостоятельно решать неравенства" поможет учащимся 9 класса осознать сущность неравенства с переменной, его виды и способы решения, отличие от уравнений и поможет подготовиться к выпускному экзамену по алгебре за курс основной школы.

Изучение данного элективного курса не требует от учащихся специальных знаний и умений, а это позволит ученикам, имеющим обязательный уровень учебных умений по неравенствам, активно включаться в познавательный процесс и максимально проявить себя.

В элективном курсе в обобщенном виде представлены теоретические основы решения 6 видов неравенств, раскрыта сущность методов решения каждого вида неравенств, причем методы решения иррациональных неравенств, неравенств с двумя переменными, с параметрами в существующих учебниках с методической точки зрения раскрыты неполно. Это повысит интерес к математике значительного числа учащихся, а не только тех, кто "силен" в математике.

Кроме того, представленные образцы решения с комментариями будут способствовать формированию умения самостоятельно решать неравенства различных видов и осознанному выбору профиля обучения после окончания 9 класса.

При организации занятий рекомендуется широко использовать групповую и парную работу, привлекать учащихся как к открытию новых способов решения задач, так и к составлению обобщенных алгоритмов их решения.

При этом занятия, основанные на взаимном сотрудничестве учащихся и учителя, учащихся между собой позволяет значительно расширить самостоятельную работу учащихся и активизировать их учебно-познавательную деятельность. В результате этого у учащихся будет формироваться более высокий уровень математической подготовки, развиваться умение анализировать, сопоставлять, сравнивать, обобщать.

Дидактические материалы для учителя представлены в виде модулей, методическая схема изложения основ каждого вида неравенств единая: справочный материал, образцы решения типовых задач, упражнения для самостоятельной работы с ответами. Особенностью задачного материала каждого модуля является то, что требования задач содержат нестандартные формулировки: найти или количество целочисленных решений неравенства, или наибольшее целое решение, или сумму целых решений и т. д.

Цель курса: в рамках предпрофильной подготовки помочь учащимся научиться решать алгебраические неравенства.

Задачи курса:
1. Развитие у учащихся умений самостоятельно анализировать, сопоставлять и видеть главное.
2. Обращение особого внимания учащихся на присущие неравенствам особенности, принципиально отличающие неравенства от уравнений.
3. Составление совместными усилиями обобщенных алгоритмов решения различных видов неравенств.

2. СОДЕРЖАНИЕ КУРСА

Тема 1. Целые рациональные и дробно-рациональные неравенства.

Понятие неравенства с переменной и сопутствующие понятия. Сравнение неравенства с уравнением. Способы получения равносильных неравенств. Целые и дробно-рациональные неравенства и способы их решения.

Основная цель: обобщение и систематизация теоретических основ рациональных неравенств, отработка понятия «равносильные неравенства» и умения решать целые и дробно-рациональные неравенства методом интервалов.

Тема 2. Иррациональные неравенства.

Понятие иррационального неравенства. Виды простейших иррациональных неравенств. Теоретические основы решения иррациональных неравенств. Способы решения иррациональных неравенств.

Основная цель: обучение решению иррациональных неравенств следующих типов: $\sqrt[n]{f(x)} > a$; $\sqrt[n]{f(x)} < a$; $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$; $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$; $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$; $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}$.

Тема 3. Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля.

Понятие модуля действительного числа, свойства модуля. Виды неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля: $|f(x)| \vee a$, $f(|x|) \vee a$, $|k_1x+b_1|+|k_2x+b_2|+\ldots+|k_rx+b_r| \vee c$, $|f(x)|g(x) \vee a$ и способы их решения.

Основная цель: осознание сущности модуля и его свойств и обучение решению различных типов неравенств с модулем.

Тема 4. Неравенства с параметром.

Понятие неравенства с параметром и сопутствующие понятия. Линейные, квадратные, дробно-рациональные и иррациональные неравенства с параметром.

Основная цель: осознать сущность процесса решения неравенства с параметром, понятия "контрольное значение параметра".

Тема 5. Неравенства с двумя неизвестными.

Понятие неравенства с двумя неизвестными. Виды неравенств с двумя неизвестными и их геометрический смысл.

Основная цель: обучение графическому решению неравенств с двумя неизвестными.

Тема 6. Комбинированные неравенства.

Некоторые виды комбинированных видов и некоторые способы их решения.

Основная цель: обучение решению некоторых видов комбинированных неравенств и составление рациональных алгоритмов их решения.

3.Требования к уровню подготовки учащихся.

В результате изучения курса учащиеся:

- осознают принципиальное отличие неравенств от уравнений;
- знают теоретические основы тождественных преобразований при решении алгебраических неравенств;
- умеют решать целые рациональные и дробно-рациональные неравенства различных видов, в том числе линейные, квадратные, иррациональные неравенства, неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля, а также некоторые виды нестандартных неравенств.

Учебно-тематический план курса

Данный элективный курс предполагает 18 тематических занятий

№	Тема	Кол-во часов
1	Целые рациональные и дробно-рациональные неравенства	**4**
2	Иррациональные неравенства	**2**
3	Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля	**2**
4	Неравенства с параметрами	**4**
5	Неравенства с двумя неизвестными	**2**
6	Комбинированные неравенства	**4**

4. Перечень учебно-методического обеспечения.

1). Алгебра и геометрия: Практикум абитуриента / Под ред. Ф. Ф. Егорова. – М.: Бюро Квантум, 1995.—128 с. – Прил. К журналу ‘Квант’ №3/95.

2). Башмаков, М. И., Уравнения и неравенства. – М.: 1971.

3). Вавилов, В. В., Задачи по математике. Уравнения и неравенства: Справочное пособие / В. В. Вавилов, И. И. Мельников,
С. Н. Олехник, П. И. Пасиченко. – М.: Наука. Гл. ред. физ.-мат. лит., 1987.

4). Виленкин, Н. Я., Алгебра и математический анализ для 11 класса: Учеб. пособие для учащихся шк. и кл. с углубл. изуч. Математики / Н. Я. Виленкин, О. С. Ивашев-Мусатов, С. И. Шварцбурд.—6-е изд. – М.: Просвещение, 1998. – 288 с.:ил.

5). Виленкин, Н. Я., Задачник-практикум по элементарной алгебре / Н. Я. Виленкин, А. А. Кочева, И. В. Стеллецкий. – М.: Просвещение,1969.

6). Выгодский, М. Я., Справочник по элементарной математике. – Спб.: Союз, 1997.

7). Зайцев, В. В., Элементарная математика. Повторит. курс / Зайцев В. В. и др. / Под. ред. В. В. Рыжкова.— Изд. 2-е, перераб. и доп. – М.: Наука, 1974.

8). Клейн, Элементарная математика с точки зрения высшей / Клейн, Феликс / Лекции, читанные в Геттингемс. ун-те -- 4-е изд. – М.: Наука, 1987.

9). Мельников, И. И., Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах / И. И. Мельников, И. Н. Сергеев. – М.:Изд-во Моск.ун-та,1990. – 303 с.: ил.

10). Нестеренко, Ю. В., Задачи вступительных экзаменов по математике / Ю. В. Нестеренко, С. Н. Олехник, М. К. Потапов. – М.: Наука, Гл. ред. физ.-мат. лит., 1980.

11). Подтягин, М. Е., Элементарная математика. Теория и практика: Пособие к приемным экзаменам для поступающих в вузы. – М.: Высш. Школа, 1970.

12). Сборник задач по элементарной математике: Пособие для самообразования.— Изд-е 15-е.— М.: Наука, 1973.

13). Шарыгин, И. Ф., Решение задач: Учебное пособие для 11 кл. общеобразоват. учреждений / И. Ф. Шарыгин, В. И. Голубев. – 2-е изд. – М.: Просвещение, 1995.

14). Энгелер, Математика элементарной математики / Энгелер, Эрвин / Под ред. Слисенко А. О / Пер. с нем. Минца, Г. Е.. – М.: Мир, 1987.

15). Энциклопедия элементарной математики / Гл. ред. П. С. Александров и др. – М.: Наука, 1996.

ДИДАКТИЧЕСКИЕ МАТЕРИАЛЫ

Вводный справочный материал

1. ***Неравенствами с одной переменной*** x называются соотношения вида $f(x) < g(x), f(x) > g(x), f(x) \geq g(x), f(x) \leq g(x)$, где $f(x)$ и $g(x)$ некоторые функции от x [14].
2. ***Решить неравенство*** – значит найти все множество М значений x, при подстановке которых в неравенство получаются верные числовые неравенства. Множество М называется ***решением неравенства*** [2].
3. Для неравенства понятие корня не вводится. В отличие от уравнения решением неравенства чаще всего являются бесконечные множества. Значит, сделать полную проверку ответа, как делали для уравнений, невозможно. Поэтому очень важно при решении неравенства переходить только к равносильным неравенствам.
4. ***Равносильными неравенствами*** называются неравенства, имеющие одно и то же множество решений. Неравенства, множество решений которых является пустым множеством, считают равносильными [15].
5. К равносильным неравенствам приводят такие тождественные преобразования, которые не изменяют область определения неравенства (ООН). ***Область определения неравенства*** – общая часть областей определения функций, входящих в данное неравенство (так же, как и для уравнений) [1].
6. При решении будем использовать следующие ***утверждения*** [6], касающиеся всех неравенств:

Утверждение 1. Если члены неравенства перенести из одной части в другую с противоположным знаком, оставив знак неравенства без изменений,
то получится неравенство, равносильное данному.

Утверждение 2. Если обе части неравенства умножить на одно и то же положительное число, оставив знак неравенства без изменения, то получится неравенство, равносильное данному:

если $a > b$ и $c>0$, то $ac>bc$, где a и b -- выражения с переменной;
если $a < b$ и $c>0$, то $ac<bc$.

Утверждение 3. Если обе части неравенства умножить на одно и то же отрицательное число, изменив знак неравенства на противоположный, то получится неравенство, равносильное данному:

если $a > b$ и $c>0$, то $ac<bc$, где a и b -- выражения с переменной;
если $a < b$ и $c>0$, то $ac>bc$.

Утверждение 4. Если к обеим частям неравенства прибавить одну и ту же величину, не меняя при этом знака, то получим неравенство, равносильное данному:

если $a > b$ и c -- любое, то $a+c > b+c$;

если $a < b$ и c -- любое, то $a+c < b+c$.

Утверждение 5. Если обе части неравенства возвести в степень с нечетным показателем, оставив знак неравенства без изменения, то полученное неравенство равносильно данному.

Утверждение 6. Если обе части неравенства возвести в четную степень, то полученное неравенство равносильно исходному лишь в том случае, когда каждая часть этих неравенств неотрицательна.

7. Необходимо обратить особое внимание на различие между ***системой*** неравенств и ***совокупностью*** [6] неравенств:

Решить ***систему нескольких неравенств с одной переменной*** – это значит найти все общие решения заданных неравенств.

Решением ***системы неравенств с двумя переменными*** называется упорядоченная пара значений переменных, удовлетворяющая каждому неравенству данной системы. Чаще всего решение таких неравенств изображается графически.

Множество решений ***совокупности неравенств*** есть объединение множеств решений входящих в нее неравенств.

Для обозначения ***системы нескольких неравенств*** используется фигурная скобка. Например, $\begin{cases} 2x-5<0 \\ x^2-4x+3>0 \end{cases}$ -- это система неравенств $2x-5<0$ и $x^2-4x+3>0$.

Для обозначения ***совокупности нескольких неравенств*** используется квадратная скобка. Например, $\left[\begin{array}{l} 2x-5<0 \\ x^2-4x+3>0 \end{array}\right.$ -- это совокупность неравенств $2x-5<0$ и $x^2-4x+3>0$.

Упражнения для самостоятельной работы:

1. *Будут ли равносильны следующие неравенства*:

а). $\dfrac{(x-1)(x+2)}{(x+3)} \le 0$ и $(x-1)(x+2)(x+3) \le 0$;

б). $(x-1)^2(2x+3) \le (x-1)^2(x^2+2x+12)$ и $2x+3 \le x^2+2x+12$;

в). $\sqrt{x^2-11x+30} \le \sqrt{x-2} \le \sqrt{x^2-22}$ и $\begin{cases} \sqrt{x^2-11x+30} \le \sqrt{x-2} \\ \sqrt{x-2} \le \sqrt{x^2-22} \end{cases}$;

г). $\sqrt{x+2}<0$ и $x^2+4<0$.

Решение целых рациональных неравенств

Справочный материал

Пусть дано неравенство $f(x)>g(x)$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ заданы целыми рациональными выражениями, то неравенство называют целым рациональным неравенством [1].

Данное неравенство $f(x)>g(x)$ равносильно неравенству $f(x)-g(x)>0$. А так как $f(x)-g(x)$ – целое рациональное выражение, которое можно представить в виде многочлена стандартного вида, то решение всякого целого рационального неравенства можно свести к решению равносильного ему неравенства, у которого в левой части стоит многочлен стандартного вида $P(x)$, а в правой части – нуль, то есть к неравенству $P(x)>0$.

2. Известно, что всякий многочлен $P(x)$, имеющий корнями числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$, можно представить в виде: $P(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)Q(x)$,

то есть неравенство $P(x)>0$ можно записать в виде $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)Q(x)>0$. При этом если $x_1, x_2, \ldots, x_n$ -- все корни многочлена $P(x)$, то многочлен $Q(x)$ не имеет действительных корней, а, следовательно, сохраняет один и тот же знак на всей числовой оси.

Для решения таких целых рациональных неравенств используется ***метод интервалов***. Его алгоритм следующий:

1. Решить соответствующее неравенству уравнение и записать неравенство в виде $(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n)Q(x)>0$.
2. Отметить на числовой прямой найденные в п. 1 корни.
3. На каждом из полученных промежутков определить знак левой части неравенства, полученного в п. 1.
4. Выделить такие промежутки, на которых выполняется неравенство и записать ответ.

Следует иметь в виду:

- *если многочлен в левой части неравенства имеет только линейные множители, то можно применить «кривую знаков»;*
- *если многочлен в левой части неравенства имеет также нелинейные множители, то применение «кривой знаков» может привести к неверному результату.*

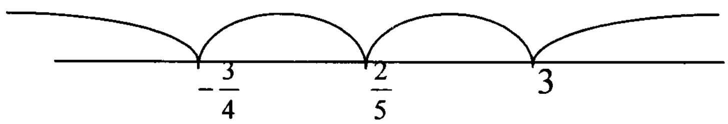
Упражнения с решениями

Пример 1. *Решите неравенство*

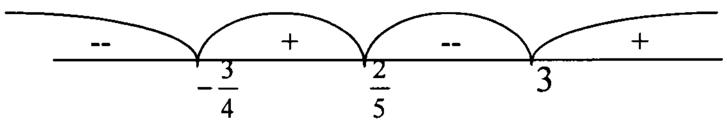
$$(5x-2)(4x+3)(x-3)\ge 0$$

Решение.

1. Согласно алгоритму решим соответствующее неравенству уравнение $(5x-2)(4x+3)(x-3)=0$ и найдем его корни: $x_1=\frac{2}{5}, x_2=-\frac{3}{4}, x_3=3$.
2. Нанесем найденные корни на числовую прямую



3. Найденные корни разбивают числовую прямую на четыре промежутка. Выбираем пробные точки в каждом промежутке и определяем знак многочлена, стоящего в левой части неравенства



4. Выбираем промежутки, на которых выполняется данное неравенство.

Получаем, что неравенство верно при $x\in\left[-\frac{3}{4};\frac{2}{5}\right]\cup[3;+\infty)$.

Ответ. $x\in\left[-\frac{3}{4};\frac{2}{5}\right]\cup[3;+\infty)$.

Пример 2. *Решите неравенство*

$$(x^2+x)^2x(x^4-4x^3+4x^2)\le 0.$$

Решение.

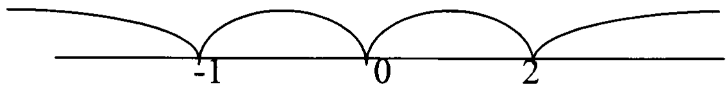
Решим соответствующее уравнение

$(x^2+x)^2x(x^4-4x^3+4x^2)=0$.

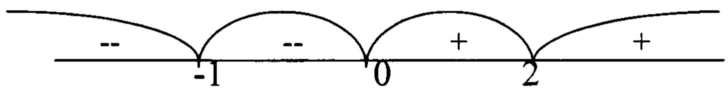
$x^2(x+1)^2x^3(x^2-4x+4)=0$

$x^5(x+1)^2(x-2)^2=0$. Корни этого уравнения: $x_1=-1, x_2=0, x_3=2$.

Нанесем найденные корни на числовую прямую



1. Найденные корни разбивают числовую прямую на четыре промежутка. Определяем знак многочлена на каждом промежутке.



2. Выбираем промежутки, на которых выполняется неравенство:
   $x \in (-\infty; -1] \cup [-1; 0]$, то есть $x \in (-\infty; 0]$.

Ответ. $x \in (-\infty; 0]$.

Пример 3. *Решите неравенство*

$$(x-1)^2(x^2-2) < (x-1)^2(6-2x).$$

Решение.

1. Заменим данное неравенство на равносильное ему:

$(x-1)^2(x^2-2) - (x-1)^2(6-2x) < 0$ и решим соответствующее этому неравенству уравнение:

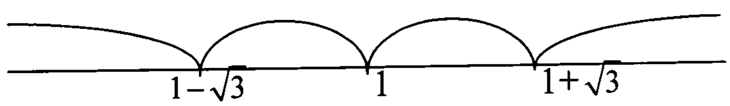
$$(x-1)^2(x^2-2) - (x-1)^2(6-2x) = 0$$

$$(x-1)^2(x^2-4x+4-6+2x) = 0$$

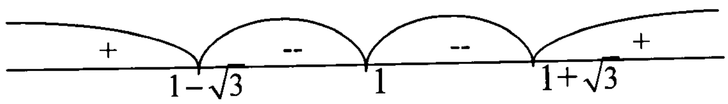
$(x-1)^2(x^2-2x-2) = 0$. Корни: $x_1 = 1, x_2 = 1-\sqrt{3}, x_3 = 1+\sqrt{3}$.

Тогда неравенство принимает вид: $(x-1)^2(x-1-\sqrt{3})(x-1+\sqrt{3}) < 0$.

2. Отметим на числовой прямой найденные корни:



3. Найденные корни разбивают числовую прямую на четыре промежутка. Определим знаки произведения, стоящего в левой части неравенства пункта 1, на соответствующих промежутках.



4. Выбираем промежутки, на которых выполняется неравенство:

$x \in \left[1-\sqrt{3};1\right] \cup \left(1;1+\sqrt{3}\right]$.

Ответ. $x \in \left[1-\sqrt{3};1\right] \cup \left(1;1+\sqrt{3}\right]$.

Упражнения для самостоятельной работы

2. Решите неравенства:

2.1. $25x^4 + 121x^2 - 20 > 0$.

2.2. $(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) > 0$.

2.3. $(3x^2 - 5x + 8)(x+4) < 0$.

2.4. $(x^2-1)^3(3x^2+1) > (x^2-1)^3(6-3x-5x^2)$.

2.5. $(x^2-2)(x^2+4) \le (2x^2-5)(x^2+4)$.

2.6. $x^4 - 2x^3 > 2x + 1$.

2.7. $x^8 + 3x^4 \le 4$.

2.8. $(x^2+x+3)(x^2+x+4) > 12$.

2.9. $9x^3 - 18x^2 > x - 2$.

2.10. $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) \ge -15$.

2.11. $(x-1)^3(x-2)(2x-3) < (x-1)^3(x-2)^2$.

Ответы: **2.1.** $x \in \left(-\infty;-\frac{2}{5}\right) \cup \left(\frac{2}{5};+\infty\right)$; **2.2.** $x \in (-\infty;1) \cup (2;3) \cup (4;+\infty)$; **2.3.** $x \in (-\infty;-4)$; **2.4.** $x \in (-\infty;;-1) \cup \left(-1;\frac{5}{8}\right) \cup (1;+\infty)$; **2.5.** $x \in \left(-\infty;-\sqrt{3}\right] \cup \left[\sqrt{3};+\infty\right)$; **2.6.** $x \in \left(-\infty;1-\sqrt{2}\right) \cup \left(1+\sqrt{2};+\infty\right)$; **2.7.** $x \in [-1;1]$; **2.8.** $x \in (-\infty;-1) \cup (0;+\infty)$; **2.9.** $x \in \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right) \cup (2;+\infty)$; **2.10.** $x \in \left(-\infty;-4-\sqrt{6}\right) \cup \left(-6;-4+\sqrt{6}\right) \cup \left(-4+\sqrt{6};-2\right) \cup (-2;+\infty)$; **2.11.** $x \in (-\infty;-1) \cup (-1;2)$.

Решение дробно-рациональных неравенств

Справочный материал

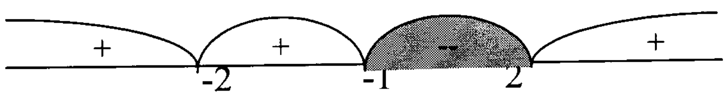
1. Решение дробно-рациональных уравнений $f(x)=g(x)$ сводится к решению ему равносильного уравнения вида $\dfrac{F(x)}{G(x)}=0$, где $F(x)$ и $G(x)$ -- многочлены от переменной x. Дробно-рациональные неравенства $f(x)>g(x)$ также можно свести к равносильному ему неравенству $\dfrac{F(x)}{G(x)}>0$, где $F(x)$ и $G(x)$ -- многочлены от переменной x. [1]
2. Так как неравенство $\dfrac{F(x)}{G(x)}>0$ равносильно неравенству $F(x)G(x)>0$, то и для решения дробно-рациональных неравенств можно использовать метод интервалов.
3. Алгоритм решения дробно-рациональных неравенств может быть таким:
   - свести данное неравенство к виду $\dfrac{F(x)}{G(x)}>0$;
   - применить к полученному неравенству метод интервалов.

Упражнения с решениями

Пример 4. *Решите неравенство* $\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(2-x)}\geq 0$.

Решение. Данное неравенство равносильно следующему: $\dfrac{(x+2)^2}{(x+1)(x-2)}\leq 0$.

Применим к его решению метод интервалов, помня о том, что знаменатель дроби не может быть равен нулю:



Ответ. $x\in\{-2\}\cup(-1;2)$.

Примечание: $x=-2$ *является решением, так как нам предложено решить нестрогое неравенство (совокупность уравнения и строгого неравенства).*

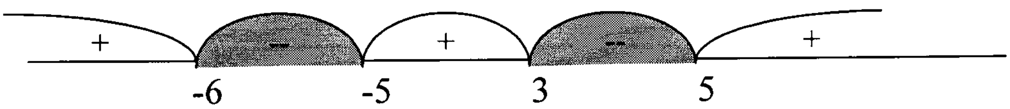
Пример 5. *Решите неравенство* $\dfrac{x^2+3x+54}{x^2-8x+15}+\dfrac{8}{x-5}\le 0$.

Решение. Выполним преобразования, позволяющие данное неравенство свести к равносильному ему неравенству типа $\dfrac{F(x)}{G(x)}>0$:

$$\frac{x^2+3x+54}{(x-5)(x-3)}+\frac{8}{x-5}\le 0 \Leftrightarrow \frac{x^2+3x+54+8x-24}{(x-5)(x-3)}\le 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{x^2+11x+30}{(x-5)(x-3)}\le 0 \Leftrightarrow \frac{(x+6)(x+5)}{(x-5)(x-3)}\le 0$$

Применим метод интервалов, рассматривая полученное неравенство в его области определения:



Ответ. $x\in[-6;-5]\cup(3;5)$.

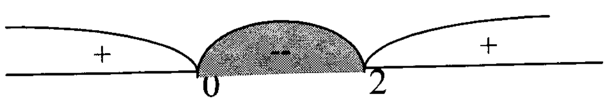
Пример 6. *Найдите все целые решения неравенства* $f(x)\ge f(x+2)$, если $f(x)=1-\dfrac{4}{x-2}$.

Решение. Составим по условию неравенство, которое предполагается решить. Так как $f(x)=1-\dfrac{4}{x-2}$, то $f(x+2)=1-\dfrac{4}{(x+2)-2}$. Или по другому $f(x)=\dfrac{x-6}{x-2}$ и $f(x+2)=\dfrac{x-4}{x}$. Следовательно, требуется решить неравенство $\dfrac{x-6}{x-2}\ge\dfrac{x-4}{x}$. Преобразуем это неравенство к виду $\dfrac{F(x)}{G(x)}>0$.

$$\frac{x-6}{x-2}-\frac{x-4}{x}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{x^2-6x-x^2+6x-8}{x(x-2)}\ge 0 \Leftrightarrow \frac{-8}{x(x-2)}\ge 0 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \frac{8}{x(x-2)}\le 0.$$

Решим полученное неравенство в ООН: $x\ne 0; x\ne 2$.



Целых решений на этом интервале одно: $x=1$.

Ответ. $x=1$ -- целое решение исходного неравенства.

Упражнения для самостоятельной работы

3. *Найдите сумму целых чисел, являющихся решениями неравенства:*

3.1. $\dfrac{(x-4)^2}{(x-2)(x+2)} \le 0$;

3.2. $\dfrac{(x+3)^2}{(x+2)(x-3)} \le 0$.

3.3. $\dfrac{6x+21}{(x^2+6x+9)(x^2+9x+8)} + \dfrac{1}{x^2+11x+24} \le 0$;

3.4. $\dfrac{8x-5}{(x^2+2x)(x^2-3x)} \ge \dfrac{1}{x(x-3)}$.

4. *Найдите все целочисленные решения неравенств:*

a. *для которых* $f(x) \ge f(x-2)$, *где* $f(x) = x - \dfrac{2}{x-3}$;

b. $\dfrac{8x+11}{(x^2+4x+4)(x^2+3x-4)} \ge \dfrac{1}{x^2+x-2}$.

5. *Решите неравенства:*

5.1. $\dfrac{x+1}{1-3x} > \dfrac{1}{3}$;

5.2. $\dfrac{5x^2-33x+42}{x^2-8x+15} \le \dfrac{4x}{x-3}$;

5.3*. $\dfrac{12}{x^2+2x} - \dfrac{3}{x^2+2x-2} > 1$;

5.4*. $\dfrac{x^2-x}{x^2-x+1} > \dfrac{x^2-x+2}{x^2-x-2} + 1$.

6. *Укажите наибольшее целое решение неравенства:*

6.1. $\dfrac{30}{(x+3)(x-4)} - \dfrac{4}{x-4} \le -1$;

6.2. $\dfrac{10}{(x+1)(x-2)} - \dfrac{4}{x-2} \le -1$.

7. *Укажите наименьшее целое решение неравенства* $\dfrac{(x-2)(x-3)}{(x+2)(x+3)} \le \dfrac{x+4}{x-4}$

Ответы: **3.1.** 2; **3.2.** –1; **3.3.** –17; **3.4.** 9; **4.a.** 2; **4.b.** $x \in \{-3;-1;2;3\}$; **5.1.** $x \in \left(-\frac{1}{3};\frac{1}{3}\right)$; **5.2.** $x \in (3;5) \cup [6;7]$; **5.3*** $x \in (-4;-3) \cup \left(-1-\sqrt{3};-2\right) \cup \left(0;-1+\sqrt{3}\right) \cup (1;2)$. Введите замену $t = x^2+2x$; **5.4*** $x \in (-1;0) \cup (1;2)$. Введите замену $t = x^2 - x$. **6.1.** 3; **6.2.** 4; **7.** 5.

Иррациональные неравенства

Справочный материал:

1. ***Иррациональными неравенствами*** называются неравенства, в которых неизвестное находится под знаком арифметического корня [4].
2. ***Простейшими иррациональными неравенствами*** будем называть неравенства вида:

   $\sqrt[n]{f(x)} > a$; $\sqrt[n]{f(x)} < a$; $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$; $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$;

   $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$; $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}$.
3. При решении иррациональных неравенств будем применять утверждения, сформулированные в общей теории неравенств (см. стр.8-9), при этом сновными будут утверждения о возведении неравенства в степень.
4. Рассмотрим решение неравенств указанного выше вида.

4.1. $\sqrt[n]{f(x)} > a$:

- если n – нечетное, то исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) > a^n$;

- если $n = 2k$, то при $a \geq 0$ равносильно неравенству $f(x) > a^{2k}$;

- если $n = 2k$, $a < 0$, то исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) \geq 0$.

4.2. $\sqrt[n]{f(x)} < a$:

- если n – нечетное, то исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) < a^n$;

- если $n = 2k$, то при $a \geq 0$ исходное неравенство равносильно системе $\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < a^{2k} \end{cases}$;

23. . если $n = 2k$, $a < 0$, то исходное неравенство не имеет решений.

4.3. $\sqrt[n]{f(x)} > g(x)$:

- если n – нечетное, то исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) > g^n(x)$;
- если $n = 2k$, то исходное неравенство равносильно совокупности двух систем:

  $\begin{cases} g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^{2k}(x) \end{cases}$ и $\begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$;.4. $\sqrt[n]{f(x)} < g(x)$:

- если n – нечетное, то исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) < g^n(x)$;
- если $n = 2k$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} g(x) > 0 \\ f(x) < g^{2k}(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases};$$

4.5. $\sqrt[n]{f(x)} < \sqrt[n]{g(x)}$:

- если n – нечетное, то исходное неравенство равносильно неравенству $f(x) < g(x)$;
- если $n = 2k$, то исходное неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \ge 0 \end{cases}.$$

4.6. $\sqrt[n]{f(x)} > \sqrt[n]{g(x)}$:

если $n = 2k$, тогда неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \ge 0 \end{cases}.$$

Упражнения с решениями

Пример 7. *Решите неравенство* $\sqrt{x^2 - x} > \sqrt{2}$.

Решение. Имеет место неравенство вида 4.1. Оно равносильно неравенству $x^2 - x > 2$ или $x^2 - x - 2 > 0$. Его решением является совокупность интервалов $(-\infty;-1)\cup(2;\infty)$.

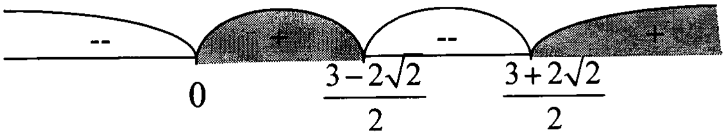
Ответ. $x \in (-\infty;-1)\cup(2;\infty)$.

Пример 8. *Решите неравенство* $\sqrt[3]{2x-1} < x - 1$.

Решение. Дано неравенство вида 4.4. Оно равносильно неравенству

$2x-1<x^3-3x^3+3x-1$ или $x^3-3x^2+x>0$ $\Leftrightarrow$

$x(x-\frac{3-2\sqrt{2}}{2})(x-\frac{3+2\sqrt{2}}{2})>0$. Решаем методом интервалов:



Неравенство справедливо, когда $x\in\left(0;\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

Ответ. $x\in\left(0;\frac{3-2\sqrt{2}}{2}\right)\cup\left(\frac{3+2\sqrt{2}}{2};+\infty\right)$.

Пример 9. Решите неравенство $\sqrt{(x+4)(x+3)}>6-x$.

Решение. Исходное неравенство относится к виду 4.3. Оно равносильно совокупности двух систем неравенств:

а). $\begin{cases}6-x\geq 0\\(x+4)(x+3)>36-12x+x^2\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 6\\x^2+7x+12-x^2+12x-36>0\end{cases}$

$\Leftrightarrow\begin{cases}x\leq 6\\x>\frac{24}{19}\end{cases}\Leftrightarrow\frac{24}{19}<x\leq 6$.

б). $\begin{cases}6-x<0\\(x+4)(x+3)\geq 0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x>6\\x\leq -4;x\geq -3\end{cases}\Leftrightarrow x>6$.

Объединяя решения, получаем: $x\in\left(\frac{24}{19};+\infty\right)$.

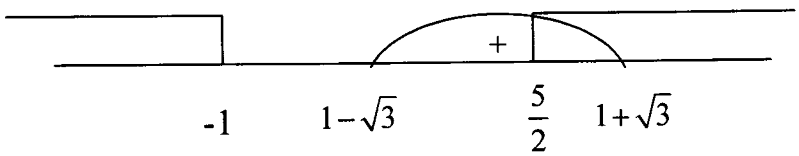
Ответ. $x\in\left(\frac{24}{19};+\infty\right)$.

Пример 10. *Решите неравенство* $\sqrt{2x^2-3x-5}<\sqrt{x-1}$.

Решение. Исходное неравенство относится к виду 4.5. Оно равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} 2x^2-3x-5<x-1 \\ 2x^2-3x-5\ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2(x-(1+\sqrt{3}))(x-(1-\sqrt{3}))<0 \\ 2(x+1)(x-\frac{5}{2})\ge 0 \end{cases} \quad \text{или}$$

$$\begin{cases} 1-\sqrt{3}<x<1+\sqrt{3} \\ x\ge\frac{5}{2};x\le -1 \end{cases}$$. Решаем методом интервалов:



Получаем, что неравенство выполняется для $x\in\left[\frac{5}{2};1+\sqrt{3}\right)$.

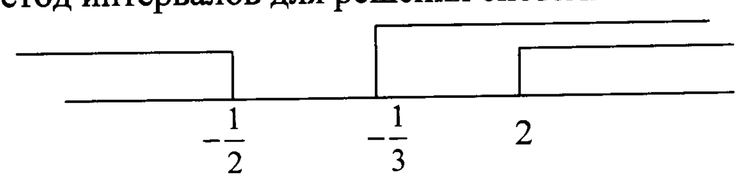
Ответ. $x\in\left[\frac{5}{2};1+\sqrt{3}\right)$.

Пример 11. *Решите неравенство* $(2x^2-3x-2)\sqrt{3x+11}>0$.

Решение. Используя определение арифметического корня и вид неравенства, запишем и решим систему неравенств, равносильную исходному неравенству:

$$\begin{cases} 2x^2-3x-2>0 \\ 3x+1\ge 0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} 2(x-2)(x+\frac{1}{2})>0 \\ x\ge -\frac{1}{3} \end{cases}.$$

Используем метод интервалов для решения системы:



Решением неравенства является интервал $(2;+\infty)$.

Ответ. $x\in(2;+\infty)$.

Упражнения для самостоятельной работы

. *Решиеь неравенства:*

8.1. $\sqrt[6]{\dfrac{x-2}{3x+6}}>1$; **8.2.** $\sqrt{\dfrac{x-2}{1-2x}}>-1$;

8.3. $\sqrt[5]{\dfrac{2x-2}{3x+6}}<1$; **8.4.** $\sqrt{x^2+3x+3}<2x+1$;

8.5. $\sqrt{(x+4)(x+3)}>6-x$; **8.6.** $\sqrt[3]{x^2+1}>x+1$;

8.7. $\sqrt{3x-10}>\sqrt{6-x}$; **8.8.** $\sqrt[5]{x^2-4x}>\sqrt[5]{3-2x}$;

8.9. $(3x-x^2-2)\sqrt{7x+4}<0$; **8.10.** $(3x^2-x-2)\sqrt{2x-1}<0$;

8.11. $\sqrt{2x^2-3x-1}>\sqrt{x^2-3x+2}$; **8.12.** $\sqrt[4]{12-x-x^2}\sqrt[3]{x+3}>0$;

8.13. $\sqrt[3]{-x^2+x+6}\sqrt{6-x}\geq 0$; **8.14.** $\sqrt[3]{2x^2-11x-21}\sqrt{4-x}\leq 0$.

Ответы: **8.1.** $x\in(-4;-2)$; **8.2.** $x\in\left(\dfrac{1}{2};2\right]$; **8.3.** $x\in(-\infty;-8)\cup(-2;+\infty)$; **8.4.** $x\in\left(\dfrac{2}{3};+\infty\right)$; **8.5.** $x\in\left(\dfrac{24}{19};+\infty\right)$; **8.6.** $x\in(-\infty;0)$; **8.7.** $x\in(4;6]$; **8.8.** $x\in(-\infty;-1)\cup(3;+\infty)$; **8.9.** $x\in\left(-\dfrac{4}{7};1\right)\cup(2;+\infty)$; **8.10.** $x\in\left\{\dfrac{1}{2}\right\}\cup[1;+\infty)$; **8.11.** $x\in(-\infty;-1)\cup[2;+\infty)$; **8.12.** $x\in(-3;3]$; **8.13.** $x\in[-2;3]\cup\{6\}$; **8.14.** $x\in\left[-\dfrac{3}{2};4\right]$.

Решение неравенств, содержащих неизвестное под знаком модуля

1. ***Модулем числа или*** его ***абсолютной величиной*** будем называть само это число, если оно не отрицательно, и противоположное число, если число отрицательное. Обозначение: $|a|=\begin{cases}a, если\_a\geq 0\\ -a, если\_a<0\end{cases}$

2. Основные свойства модуля:

1). $|a|\geq 0$;

2). $|a|=|-a|$;

3). $|ab| = |a||b|$;

4). $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$;

5). $|a|^2 = a^2$.

6). $\sqrt{a^2} = |a|$.

7). $|a-b| \geq |a| - |b|$.

8). $|a+b| \leq |a| + |b|$.

3. ***Неравенствами, содержащими неизвестное под знаком модуля***, будем называть неравенства вида:

$$|f(x)| < a\text{; } |f(x)| > a\text{; } f(|x|) > a\text{; } f(|x|) < a\text{; } |f(x)| > g(x)\text{;}$$

$$|f(x)| < g(x)\text{; } f(|x|) > g(x)\text{; } f(|x|) < g(x)\text{;}$$

4. Рассмотрим подробно решение неравенств указанного выше вида:

4.1. $|f(x)| < a$**:**

Это неравенство имеет решение только при условии $a > 0$. Используя определение понятия модуля, заменим данное неравенство равносильной ему системе неравенств:

$$-a < f(x) < a \quad \text{или} \quad \begin{cases} f(x) < a \\ f(x) > -a \end{cases}.$$

4.2. $|f(x)| > a$**:**

Это неравенство при $a \leq 0$ выполняется во всей области определения функции $f(x)$. Если $a > 0$, то по определению модуля данное неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

$$\left[\begin{array}{l} f(x) > a \\ f(x) < -a \end{array}\right..$$

4.3. $f(|x|) > a$:

По определению понятия модуля данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} f(x) > a \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} f(-x) > a \\ x < 0 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

4.4. $f(|x|) < a$:

По определению понятия модуля данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} f(x) < a \\ x \geq 0 \end{cases} \\ &\begin{cases} f(-x) < a \\ x < 0 \end{cases} \end{aligned}\right.$$

4.5. $|f(x)| > g(x)$:

По определению понятия модуля данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) > g(x) \end{cases} \\ &\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) > g(x) \end{cases} \end{aligned}\right.$$

4.6. $|f(x)| < g(x)$:

По определению понятия модуля данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{aligned} &\begin{cases} f(x) \geq 0 \\ f(x) < g(x) \end{cases} \\ &\begin{cases} f(x) < 0 \\ -f(x) < g(x) \end{cases} \end{aligned}\right.$$

4.7. $f(|x|) > g(x)$:

По определению понятия модуля данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)>g(x)\\ x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(-x)>g(x)\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.$$

4.8. $f(|x|)<g(x)$:

По определению понятия модуля данное неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}f(x)<g(x)\\ x\geq 0\end{cases}\\ \begin{cases}f(-x)<g(x)\\ x<0\end{cases}\end{array}\right.$$

5. Неравенства вида $|k_1x+b_1|+|k_2x+b_2|+...+|k_rx+b_r|>c$ решаются по алгоритму, аналогичному алгоритму решению соответствующих уравнений:

5.1. Найти значения переменной, при переходе через которые меняется знак выражений $k_1x+b_1, k_2x+b_2, ..., k_rx+b_r$, то есть решить совокупность уравнений $k_1x+b_1=0, k_2x+b_2=0, ..., k_rx+b_r=0$ и найти корни этих уравнений $x_1, x_2, ..., x_r$.

5.2. Отметить найденные значения $x_1, x_2, ..., x_r$ на числовой прямой (пусть для определенности $x_1<x_2<...<x_r$).

5.3. Рассмотреть данное неравенство последовательно на промежутках $(-\infty; x_1); [x_1; x_2); ...[x_2; +\infty)$, решить полученную совокупность неравенств и в ответ отобрать те промежутки или значения переменной, которые содержатся в соответствующих промежутках.

Примечание. *Аналогично решаются и неравенства, содержащие под знаком модуля нелинейные зависимости.*

Упражнения с решениями

Пример 12. *Решите неравенство* $\left|x^2-5x+5\right|<1$.

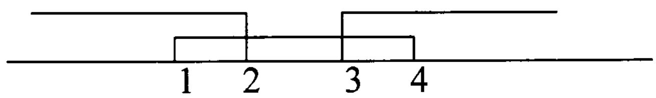
Решение. Это неравенство вида 4.1. По определению модуля неравенство равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} x^2-5x+5>-1 \\ x^2-5x+5<1 \end{cases}.$$

Решив каждое неравенство системы, получаем:

$$\begin{cases} \left[\begin{array}{l} x>3 \\ x<2 \end{array}\right. \\ 1<x<4 \end{cases}$$

Решив систему методом интервалов, выберем решение системы:



Ответ. $x\in(1;2)\cup(3;4)$.

Пример 13. *Решите неравенство* $\left|x^2-5x+5\right|>1$.

Решение. Это неравенство вида 4.2. По определению модуля неравенство равносильно совокупности двух неравенств:

а). $x^2-5x+5>1 \Leftrightarrow x^2-5x+4>0 \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} x>4 \\ x<1 \end{array}\right.$

б). $x^2-5x+5<-1 \Leftrightarrow x^2-5x+6<0 \Leftrightarrow 2<x<3$.

Решением исходного неравенства является объединение промежутков $(-\infty;1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$.

Ответ. $x\in(-\infty;1)\cup(2;3)\cup(4;+\infty)$.

Пример 14. *Решиеь неравенство* $\dfrac{|x|+1}{2|x|}>1$.

Решение. Это неравенство вида 4.3. Область определения данного неравенства $x\neq 0$. Так как в области определения $2|x|>0$, то данное неравенство равносильно неравенству: $|x|+1>2|x|$ *или* $|x|<1$, используя определение модуля, заменяем данное неравенство совокупностью систем неравенств:

$$\left[\begin{array}{l}\begin{cases}x<0\\ x>1\end{cases}\\ \begin{cases}-x<1\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1\\ \begin{cases}x>-1\\ x<0\end{cases}\end{array}\right. \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l}0<x<1\\ -1<x<0\end{array}\right.$$

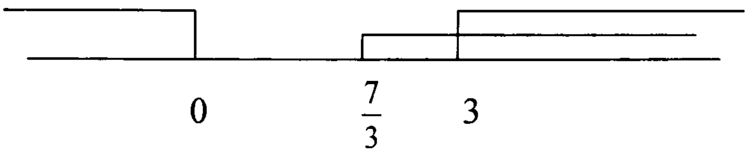
Ответ. $x\in(-1;0)\cup(0;1)$.

Пример 15. *Решите неравенство* $|3x-7|\le x^2-7$.

Решение. Это неравенство вида 4.5. Неравенство равносильно совокупности двух систем неравенств:

$$\text{а).}\begin{cases}3x-7\ge 0\\ 3x-7\le x^2-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\dfrac{7}{3}\\ x^2-3x\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\ge\dfrac{7}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x\ge 3\\ x\le 0\end{array}\right.\end{cases}$$

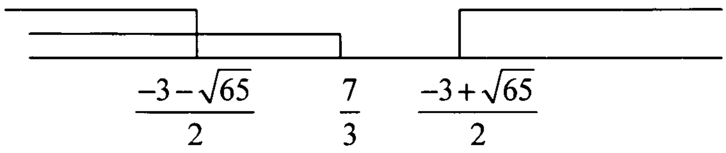
Решаем методом интервалов:



Система имеет решение $x\ge 3$.

$$\text{б).}\begin{cases}3x-7<0\\ -3x+7\le x^2-7\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{7}{3}\\ x^2+3x-14\ge 0\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x<\dfrac{7}{3}\\ \left[\begin{array}{l}x\le\dfrac{-3-\sqrt{65}}{2}\\ x\ge\dfrac{-3+\sqrt{65}}{2}\end{array}\right.\end{cases}$$

Применяем метод интервалов:



Решением этой системы является $x \le \dfrac{-3-\sqrt{65}}{2}$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{65}}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

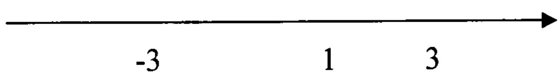
Пример 16. *Решите неравенство* $|x+3|+|x-3|+|x-1|<10$.

Решение. Это неравенство вида 5. Будем решать его согласно приведенному выше алгоритму:

1. Найдем значения переменной, при переходе через которые меняются знаки выражений $x+3, x-3, x-1$:

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$
$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$
$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

2. Отметим найденные значения переменной на числовой прямой:



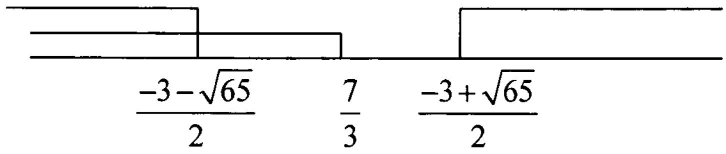
3. Рассмотрим данное неравенство на четырех образовавшихся промежутках и отберем соответствующие решения, то есть решим совокупность четырех систем неравенств:

а). $\begin{cases} x<-3 \\ -x-3-x+3-x+1<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

б). $\begin{cases} -3 \le x < 1 \\ x+3-x+3-x+1<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x < 1 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<1$.

в). $\begin{cases} 1 \le x < 3 \\ x+3-x+3+x-1<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x < 3 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x < 3$.

г). $\begin{cases} x \ge 3 \\ x+3+x-3+x-1<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x<\dfrac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x < \dfrac{11}{3}$.



Решением этой системы является $x \le \dfrac{-3-\sqrt{65}}{2}$.

Ответ. $x \in \left(-\infty; \dfrac{-3-\sqrt{65}}{2}\right] \cup [3; +\infty)$.

Пример 16. *Решите неравенство* $|x+3|+|x-3|+|x-1|<10$.

Решение. Это неравенство вида 5. Будем решать его согласно приведенному выше алгоритму:

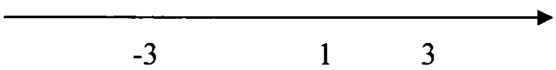
1. Найдем значения переменной, при переходе через которые меняются знаки выражений $x+3, x-3, x-1$:

$$x+3=0 \Rightarrow x=-3$$

$$x-3=0 \Rightarrow x=3$$

$$x-1=0 \Rightarrow x=1$$

2. Отметим найденные значения переменной на числовой прямой:



3. Рассмотрим данное неравенство на четырех образовавшихся промежутках и отберем соответствующие решения, то есть решим совокупность четырех систем неравенств:

а). $\begin{cases} x<-3 \\ -x-3-x+3-x+1<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x<-3 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow x \in \varnothing$.

б). $\begin{cases} -3 \le x<1 \\ x+3-x+3-x+1<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -3 \le x<1 \\ x>-3 \end{cases} \Leftrightarrow -3<x<1$.

в). $\begin{cases} 1 \le x<3 \\ x+3-x+3+x-1<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 \le x<3 \\ x<5 \end{cases} \Leftrightarrow 1 \le x<3$.

г). $\begin{cases} x \ge 3 \\ x+3+x-3+x-1<10 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \ge 3 \\ x<\dfrac{11}{3} \end{cases} \Leftrightarrow 3 \le x<\dfrac{11}{3}$.

Календарно-тематическое планирование курса «Способы решения нестандартных неравенств» 9-В класс, на 2018-2019 учебный год

Данный курс рассчитан на 18 тематических занятий, 1 час в неделю.

Темы	Дата по плану	Дата по факту	№ урока по теме/ № урока по плану	№ урока по факту	Примечание
Целые рациональные и дробно-рациональные неравенства	23.01		1.1		
Целые рациональные и дробно-рациональные неравенства	30.01		1.2		
Целые рациональные и дробно-рациональные неравенства	06.02		1.3		
Целые рациональные и дробно-рациональные неравенства	13.02		1.4		
Иррациональные неравенства	20.02		1.5		
Иррациональные неравенства	27.02		1.6		
Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля	06.03		1.7		
Неравенства, содержащие неизвестное под знаком модуля	13.03		1.8		
Неравенства с параметрами	20.03		1.9		
Неравенства с параметрами	03.04		1.10		
Неравенства с параметрами	10.04		1.11		
Неравенства с параметрами	17.04		1.12		
Неравенства с двумя неизвестными	24.04		1.13		
Неравенства с двумя неизвестными	08.05		1.14		
Комбинированные неравенства	15.05		1.15		
Комбинированные неравенства	22.05		1.16		
Комбинированные неравенства			1.17		
Комбинированные неравенства			1.18		