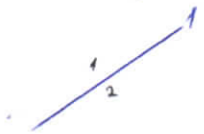
М-312-8-2

нечетные пункты - ходы 1 игрока
четные пункты - ходы ~~второго~~ 2 игрока

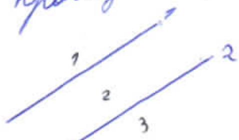
№5 Приведём пример выигрышной стратегии для второго игрока.

1) Первый игрок своим ходом может просто начертить прямую — нельзя её начертить по-разному относительно чего-то

~~2)~~

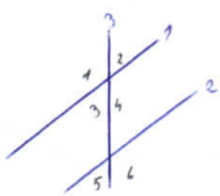


2) Второй проводит прямую, ей параллельную

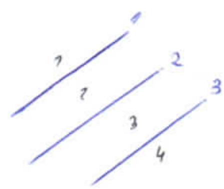


1 ∥ 2

3) Теперь у 1 игрока есть выбор: начертить прямую, параллельную прямым 1 и 2*, или пересечь одну из них, а значит, и пересечь вторую**



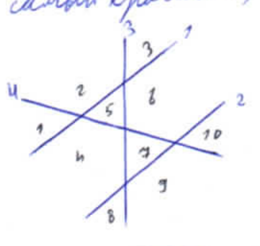
или



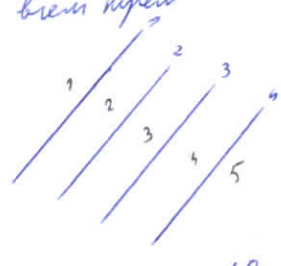
(не обяз. в таком порядке, ~~но~~ просто так удобнее обозначать)

4) Второй теперь действует в зависимости от ситуации:

пересекает все 3 прямые (один из вариантов, самый красивый)



проводит линию, параллельную всем трём



Тогда ~~площадь~~ плоскость разбавается на ~~8~~ ~~или~~ ~~10~~ 10 или 5 частей, а 10 ⋮ 5, 5 ⋮ 5, значит, второй игрок побеждает. (Черным пронумерованы части плоскости)

Причём до этого 1 игрок не может поделить плоскость на кратное 5 число частей, мы это видим ~~в~~ в 1 и 3 пунктах

*По 1 следствию из аксиомы о параллельных прямых

**По 2 следствию из аксиомы о параллельных прямых

Ответ: побеждает второй игрок

7

M-312-8-2

№1 Преобразуем и решим выражение, как это показано:

$$2^{45}\cdot 25^{19} = 2^{7}\cdot 2^{38}\cdot (5^2)^{19} = 2^7\cdot 2^{38}\cdot 5^{38} = 2^7\cdot (2\cdot 5)^{38} = \cancel{2}\, 2^7\cdot 10^{38} =$$

$$= 128\cdot 10^{38} = 128\underbrace{00...000}_{38\text{ нулей}}$$

Нули в числе на сумму цифр не влияют, а значит сумма цифр равна $1+2+8=11$

Ответ: сумма цифр в числе $2^{45}\cdot 25^{19}$ равна 11

№2 Будем преобразовывать левую часть

$$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2 = 2(a-d)(a+b+c+d)$$

$$a^2+2ab+b^2-c^2-2cd-d^2+a^2+2ac+c^2-b^2-2bd-d^2 = 2(a-d)(a+b+c+d)$$

$$2a^2+2ab-2cd-2d^2+2ac-2bd = 2(a-d)(a+b+c+d)$$

$$2(a^2+ab+ac-cd-bd-d^2) = 2(a-d)(a+b+c+d)$$

$$2(a^2+ab+ac+ad-ad-bd-cd-d^2) = 2(a-d)(a+b+c+d)$$

$$2(a(a+b+c+d)-d(a+b+c+d)) = 2(a-d)(a+b+c+d)$$

$2(a-d)(a+b+c+d) = 2(a-d)(a+b+c+d)$ верно, следовательно тождество доказано.

№3 Да, существуют. Вот пример:

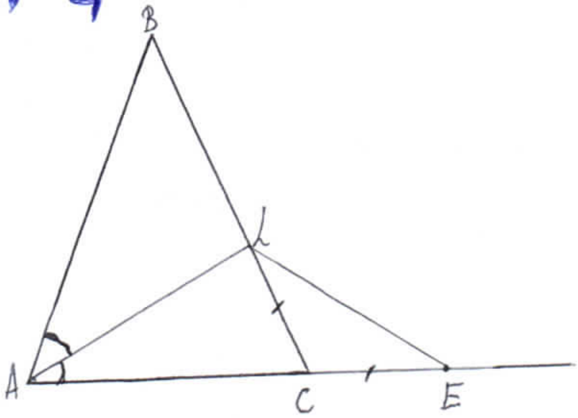
81.999.999.999 сумма цифр равна $8+1+9\cdot 9 = 9+81 = 90$, кратно 10

и

82.000.000.000 сумма цифр равна $8+2=10$, кратно 10

М-312-8-2

№4



Дано: $\triangle ABC$, $AB = BC$; AL - биссектриса $\angle A$; точка $E \subset AC$; $CL = CE$.

Доказать: $AL = LE$

Доказательство:

1) Проведём отрезок LE.

2) Обозначим угол BAL за α. Тогда $\angle LAC$ тоже равен α (AL - биссектриса, по опр. $\angle BAL = \angle LAC$), и угол $BAC = \alpha + \alpha = 2\alpha$

3) Так как $\triangle ABC$ – равнобедренный, то его углы при основании равны, и ~~угол~~ $\angle BAC = \angle BCA = 2\alpha$

~~4) $\angle LCE$ - смежный углу $\angle BCA$, следовательно $\angle LC$~~

4) Взглянем на $\triangle LCE$. В нем $LC = EC$ (по усл.), а значит $\triangle LCE$ - равнобедреный (по определению), следовательно его углы при основании равны и $\angle CLE = \angle CEL$

5) Знаем, что в треугольнике ~~сумма~~ внешний угол равен сумме двух ~~других~~, внутренних, не смежных с ним, а значит $\angle BCA = \angle CLE + \angle CEL$; а поскольку $\angle CLE = \angle CEL$, то

$\angle CLE = \angle CEL = 0,5 \cdot \angle BCA$

$\angle CLE = \angle CEL = 0,5 \cdot 2\alpha = \alpha$

6) Посмотрим на $\triangle ALE$. Знаем, что $\angle LAC = \alpha$ (п. 2) и $\angle LEC = \alpha$ (п. 5), то есть $\angle LAC = \angle LEC$. Тогда $\triangle ALE$ - равнобедреный, и $AL = LE$ (по признаку), ч.т.д.

2б

8.1

$2^{45} \cdot 25^{19} = 100^{19} \cdot 2^7 = 100^{19} \cdot 128 = 128\underbrace{0\ldots0}_{38\text{ нолей}}$

$2^2 \cdot 25 = 100$, тогда
$2^{45} \cdot 25^{19} = 25^{19} \cdot 2^{38} = 100^{19}$

$2^3 = 8$
$2^4 = 16$
$2^5 = 32$
$2^6 = 64$
$2^7 = 128$

Значит сумма цифр числа $2^{45} \cdot 25^{19}$ в десятичной записи равна $1+2+8+0 \cdot 38 = 11$

Ответ: 11

7б

8.5 Да существуют это числа 18999999999 и 19000000000

$1+8+9 \cdot 9 = 90$ $\quad$ $1+9 = 10$

$90 ⋮ 10$ и $10 ⋮ 10$

$18999999999 + 1 = 19000000000$

Ответ: да существуют таких два числа это 18999999999 и 19000000000

7б

М-312-8-29
стр. 1

8.2. $(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=2(a-d)(a+b+c+d)$

$(a+b)^2-(c+d)^2+(a+c)^2-(b+d)^2=$

$=a^2+2ab+\cancel{b^2}-\cancel{c^2}-2cd-d^2+a^2+\cancel{c^2}+2ac-\cancel{b^2}-d^2-2bd=$

$=2a^2+2ab-2cd-2d^2+2ac-2bd=2(a^2+ab-cd-d^2+$

$+ac-bd)$ ≠

$2(a-d)(a+b+c+d)=2(a^2+ab+ac+\cancel{ad}-\cancel{da}-db-$

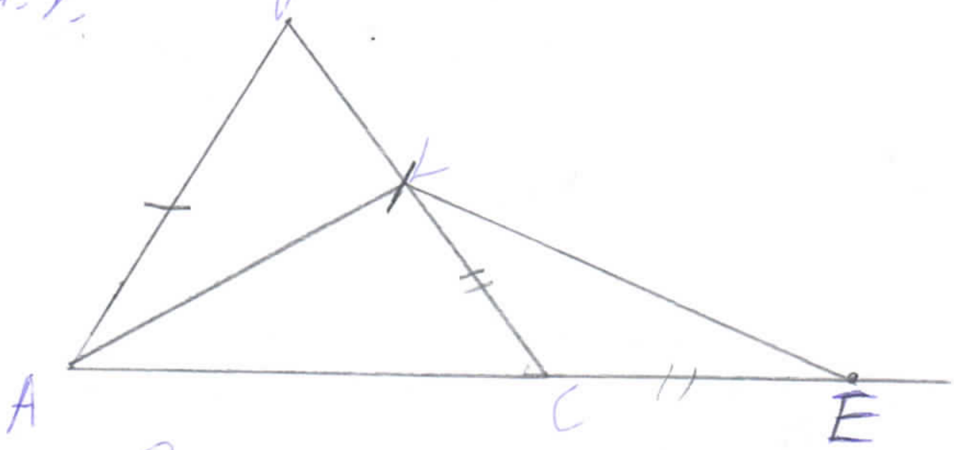
$-dc-d^2)=2(a^2+ab-cd-d^2+ac-bd)$

$2(a^2+ab-cd-d^2+ac-bd)=2(a^2+ab-cd-d^2+ac-bd)$

Верно, значит тождество доказано.

Тб

8.4.



Дано: AC-основание $\triangle ABC$, $\triangle ABC$-р/б,

AL-биссектриса $\triangle ABC$, продолжение

стороны AC за C с точкой E. CE=CL

Доказать: AL=LE

Доказательство:

$\triangle ABC$-р/б, значит $\angle BAC=\angle BCA$?

Пусть $\angle ALC=\alpha$, тогда $\angle BAL=\alpha$ (т.к. AL

биссектриса созд.)

$\angle BAC=\angle ALC+\angle BAC=2\alpha$

$\angle BCA = \angle 2$ (т.к. ΔABC — р/б)

$\angle LCE = 180° - \angle BCA = 180° - \angle 2$ (т.к. смежный угол угла $\angle CE$} равен

ΔLCE — р/б т.к. $CE = CL$ ($\angle 2$).

значит $\angle LEC = \angle CLE$,

Тогда $\angle LEC = \dfrac{180° - \angle LCE}{2} = \dfrac{180° - (180° - \angle 2)}{2} = \angle 2$

В ΔALE $\angle LAE = \angle LEA$ значит

ΔALE — р/б по признаку параллельных прямых.

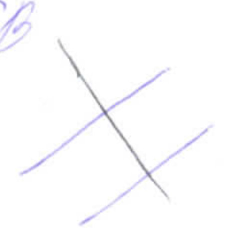
2б

2.5. Побеждать может всегда игрок 2.
Для этого после хода первого игрока
ему надо провести прямую первого вот так
(| — первый игрок, / — второй игрок)

получилось четыре куска.

Дальше первый может походить так.

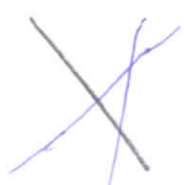
I в.



где его прямая может быть параллельна одной из ранее построенных. 6 кусков

Или так.

II в.

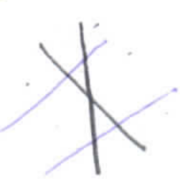


7 кусков

7б

Ход 2 второго игрока

I в.



10 кусков
10 ⋮ 5 значит он выиграл

II в.

где прямая второго игрока || одной из ранее построенных